Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ όπου

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ x, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}, \text{ με } \mathbb{Q}^c=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, $\forall x\in N_\delta(\frac{1}{2})$ όπου $N_\delta(\frac{1}{2})$ = η περιοχή κέντρου $\frac{1}{2}$ και ακτίνας δ

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο η f συνεχής στο $\xi=\frac{1}{2}$ και $f(\xi)>0$ Τότε η f θα διατηρεί πρόσημο σε μία περιοχή στο $\mathbb{R}$ κέντρου $\frac{1}{2}$ και ακτίνας δ

$$\xi=\frac{1}{2} \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

Έστω τυχόν $\varepsilon>0$

$$\left|f(x)-f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right|=\left|f(x)-\tfrac{1}{2}\right|=$$

$$=\begin{cases} |1-x-\frac{1}{2}|, & x\in\mathbb{Q} \\ |x-\frac{1}{2}|, & x\notin\mathbb{Q} \end{cases} = \begin{cases} |x-\frac{1}{2}|, & x\in\mathbb{Q} \\ |x-\frac{1}{2}|, & x\notin\mathbb{Q} \end{cases} =$$

$=|x-\frac{1}{2}|$. (1) όπου εάν η f συνεχής

$(\exists\delta>0)(\forall x\in[0,1])\ |x-\frac{1}{2}|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\frac{1}{2})|<\varepsilon$

Άρα, στην (1)

$|x-\frac{1}{2}|<\delta$ και επομένως αρκεί $\delta=\varepsilon$

Άρα, η f συνεχής στο $\xi=\frac{1}{2}$

Άρα, η f διατηρεί πρόσημο στο $(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)$ και συγκεκριμένα θετικό.